

# MODELO DE BALANZA PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES DE LA FORMA $AX+B=CX+D$ EN SECUNDARIA

BALANCE MODEL FOR THE LINEAR EQUATION RESOLUTION  
OF THE FORM  $AX + B = CX + D$  IN SECONDARY

FECHA DE RECEPCIÓN: 18 DE FEBRERO DE 2019

FECHA DE ACEPTACIÓN: 08 DE MARZO DE 2019

Daniel De Jesús Hidalgo Pérez

*Escuela Secundaria Técnica Número 5, Chiapas, México.*

*hidalgo84\_16@hotmail.com*

## Resumen

El artículo presenta los resultados y la metodología empleada para un proyecto de intervención desarrollado sobre el tema del Modelo de la Balanza Diagramático y Analítico para la resolución de ecuaciones de la forma  $ax + b = cx + d$  por el autor, el cuál fue llevado a cabo en la Escuela Secundaria Técnica No. 5, Comitán, Chiapas y cuyo propósito fue el de emplear el método como una alternativa para que los alumnos del segundo grado, grupo F y G del turno vespertino de la institución educativa mencionada, comprendan como despejar y por lo tanto la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma descrita con anterioridad. Los resultados obtenidos determinan que el método utilizado genera una mayor comprensión del tema.

**Palabras Clave:** Ecuaciones lineales, Modelo de la Balanza, Diagramático, Analítico.

## Abstract

The article present the results and the methodology used for a intervention project development on the subject the Balance Model Diagramatic and Analytical for resolution of equations of type  $ax + b = cx + d$  by author at Escuela Secundaria Técnica No. 5, Comitán, Chiapas and whose purpose was to use the method as an alternative for the students of the second grade, group F and G of the evening shift of the aforementioned educational institution, to understand how to clear and therefore the resolution of first-degree equations of the form described previously. The results obtained determine that the method used generates a greater understanding of the subject.

**Keywords:** Linear Equations, Balance Model, Diagramatic, Analytical.

## Introducción

Un paso importante hacia el pensamiento algebraico consiste en poder resolver ecuaciones cuando la incógnita aparece en ambos miembros de ésta. Para resolver este tipo de ejercicios, la técnica de invertir operaciones ya no es suficiente. El modelo de la balanza diagramático, está basado en una analogía entre lo que se puede colocar o quitar en ambos platillos de una balanza sin que ésta pierda el equilibrio.

Para resolver una ecuación con este tipo de balanza, el estudiante requiere realizar operaciones mentales de los objetos y esto le permite que desarrolle un pensamiento estratégico para despejar la incógnita, pueden, por ejemplo, aislar la incógnita de un solo lado o trabajar primero con los términos donde aparece ésta (Bonilla, 2014). Una serie de estudios empíricos llevados a cabo con el uso de este modelo reportan resultados que muestran tanto los beneficios didácticos del mismo como las dificultades que enfrentan los estudiantes al utilizarlo (Vlassis, 2002; Filloy y Rojano, 1989).

Por lo que se optó en realizar un estudio con los grupos F y G de turno vespertino de la Escuela Secundaria Técnica No. 5, en el que se les presenta el modelo descrito como una alternativa para mejorar su comprensión y su habilidad para la resolución de ecuaciones de la forma  $ax + b = c$ , aplicando estrategias de control para la verificación de los resultados correspondientes.

## Planteamiento del Problema

La intervención llevada a cabo se presentó como una propuesta de enseñanza para el estudio de las ecuaciones lineales mediante el apoyo del modelo de la balanza en la educación secundaria. El propósito es ayudar a los estudiantes a crear significado para las ecuaciones del tipo  $ax + b = c$  y para las operaciones algebraicas usadas en su resolución. La intervención se llevó a cabo como una estrategia para evitar

altos índices de reprobación y como consecuencia incrementar el índice de aprendizaje, se implementó la metodología de forma analítica y diagramática en el pizarrón para que posteriormente los alumnos fueran capaces de resolver las ecuaciones y los problemas derivados de ellos con la técnica tradicional, así mismo se les hizo entrega de hojas de trabajo en las cuales resolvieron los ejercicios.

Las problemáticas usuales a la que se enfrentan los alumnos en este nivel al resolver ecuaciones lineales de una incógnita, son la falta de habilidad para realizar despejes en cuanto al manejo de signos y la pobre identificación del orden jerárquico a seguir para cambiar de miembro los términos correspondientes, esta problemática se ve claramente reflejada en los resultados nacionales de matemáticas obtenidos en la evaluación PLANEA para alumnos de tercero de secundaria, donde se observa que únicamente el 24% de los estudiantes pueden resolver ecuaciones lineales sencillas.

Esta temática se ajusta al programa de estudios de matemáticas que se imparte en dicha institución, específicamente en el tema de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico en el subtema Patrones y Ecuaciones correspondientes al bloque cuatro.

## Método

Para el desarrollo de la intervención se utilizaron instrumentos para la recolección de datos y se presentó el modelo en clase tanto de forma analítica como diagramática, lo cual se procede a describir a continuación.

### Instrumentos para la recolección de datos

Para lograr los objetivos de esta intervención se recurrió, como es recomendado en la literatura (Casanova, 2003) a diferentes instrumentos de acopio de datos, los cuales se enumeran a continuación:

● Hojas de control. Según el Diccionario de las Ciencias de la Educación (2003) las hojas de control son pliego de papel o páginas electrónicas estructuradas, que facilitan la recopilación de información, previamente diseñadas con base en las necesidades y características de los datos que se requieren para medir y evaluar uno o varios procesos. Se diseñaron hojas de control para cada sesión con la finalidad de obtener evidencias sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

● Diario de clase. Esta herramienta nos sirve para analizar y reflexionar sobre los aspectos que componen la interacción en el desarrollo de enseñanza-aprendizaje por lo que en las anotaciones generadas se mencionan los siguientes componentes: el alumnado, el profesorado, el currículo y el contexto en cada una de las sesiones, con la finalidad de rescatar las situaciones más importantes y significativas del proceso enseñanza-aprendizaje.

● Cuestionario inicial. Está conformado por un conjunto de preguntas estructuradas referente a un tema, puede ser de manera oral o escrita, normalmente está elaborado para aplicarse a cierto número de personas (Casanova, 2003). Este cuestionario tiene como propósito recopilar información acerca de los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre el tema mencionado.

● Cuestionario final. Fue diseñado con el propósito de verificar los avances de los estudiantes con respecto al tema de estudio después de finalizar la propuesta didáctica.

## Plan de acción

Los treinta y cinco estudiantes con los que se implementó la propuesta didáctica trabajaron durante cuatro sesiones con el modelo de la balanza, de acuerdo a lo plasmado en la correspondiente planeación didáctica desarrollada y considerando que el tiempo de la clase era de 50 minutos.

En la primera sesión se realizó la presentación correspondiente del autor con el grupo, así como una actividad de integración, posteriormente se aplicó el cuestionario inicial para determinar los conocimientos previos de ambos grupos, al finalizar se procedió a analizar algunos de los resultados generados por los alumnos y dar retroalimentación sobre ellos. Finalmente se presentó un breve ejercicio sobre el modelo de la balanza diagramática interactuando con el grupo, realizando una lluvia de ideas sobre cómo resolverlo por simple intuición.

En la segunda sesión primeramente se retroalimentó lo visto en la clase anterior, generando más ejemplos sobre el modelo de la balanza diagramática, seguidamente se dio paso a las preguntas generales de los alumnos y se procedió a resolverlas. Finalmente se presentaron las dos primeras hojas de trabajo para el estudiante, quien resolvió los ejercicios propuestos mientras el docente estuvo alerta para cualquier duda que pudieran tener.

En la tercera sesión se explicó el modelo de la balanza analíticamente, interactuando con los estudiantes propiciando una lluvia de ideas, e igualmente se les presentaron dos hojas de trabajo para que las resolvieran y obtener una retroalimentación por parte del docente.

Es decir, con el objeto de indagar los procedimientos utilizados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales, se presentó una serie de ejercicios en dos momentos, el primero con el objetivo de que los estudiantes resolvieron ecuaciones con la balanza diagramática, y el segundo para resolver las ecuaciones usando el método de la balanza analítico y así poder observar

la extrapolación del conocimiento haciendo uso de imágenes y sin ellas.

### Presentación del modelo en clase

Primeramente se explicó el Modelo de la Balanza en su forma diagramática, generando ejemplos para el alumnado. Por ejemplo, para resolver la ecuación, se les dio a conocer la forma de representar la ecuación de manera diagramática, haciendo énfasis en que el signo igual era lo que permitía el equilibrio en la balanza y se procedieron a colocar los cubos con los números y las incógnitas correspondientes como se observa en la Figura 1.

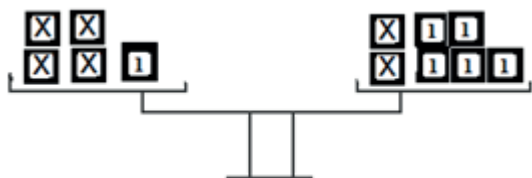


Figura 1. Modelo de la balanza diagramático.

Posteriormente se les explicó a los alumnos que es necesario mantener siempre el equilibrio de la balanza, por lo que era necesario quitar la misma cantidad de piezas de ambos platillos como se observa en la Figura 2.

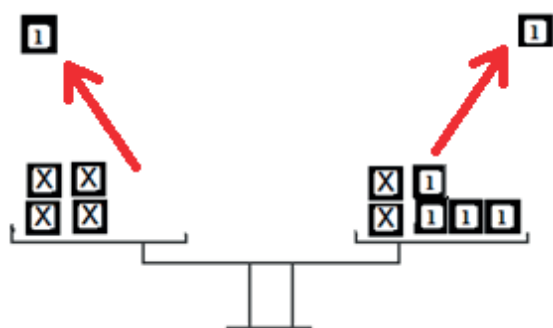


Figura 2. Ejemplo del Modelo de la Balanza Diagramático.

También se hizo la observación de que si en el platillo izquierdo ya sólo quedaban bloques con

equis, entonces ahora se retirarán estos, como se observa en la Figura 3.

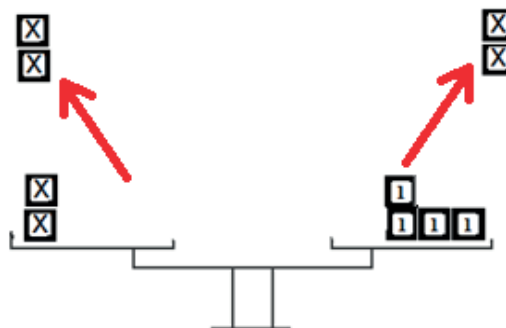


Figura 3. Sustracción de incógnitas.

Finalmente se les explicó que el ejercicio estará resuelto cuando quede una sola pieza con equis, lo cual representa el resultado final y que además es necesario realizar una división al final del ejercicio si queda más de un bloque con equis, por ejemplo en la Figura 3 se tienen 2 bloques con equis que corresponden a 4 bloques con un valor de 1, por lo que si se quita un bloque con equis se deberán quitar la mitad de los bloques con valor de 1, quedando como se observa en la Figura 4.

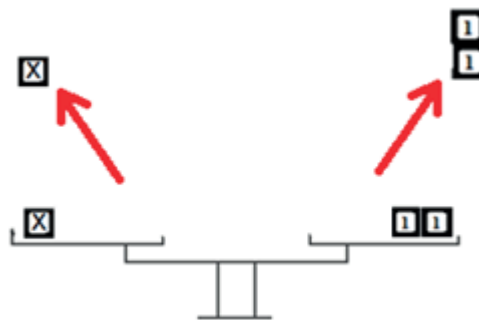


Figura 4. Solución del ejercicio.

Lo que da como resultado un valor de  $x=2$ .

A continuación se procedió a presentarles una serie de ejercicios los cuáles se desarrollarían con la misma técnica.

Posteriormente y después de verificar los aciertos y errores cometidos en los ejercicios, así como realizar la correspondiente retroalimentación, se

presentó el modelo usando el método analítico, haciendo hincapié en que la forma de retirar los cubos en el modelo diagramático era a través de la operación de resta en el modelo analítico y que es necesario igualmente conservar el equilibrio restando de ambos lados, hasta hallar el resultado que consiste en obtener una sola equis como se observa en el Ejemplo 1.

$$\begin{aligned}
 4x + 1 &= 2x + 5 \\
 4x + 1 - 1 &= 2x + 5 - 1 \\
 4x &= 2x + 4 \\
 4x - 2x &= 2x + 4 - 2x \\
 2x &= 4 \\
 \frac{2x}{2} &= \frac{4}{2} \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

#### **Ejemplo 1. Modelo de la Balanza Analítico.**

Para finalizar se les solicitó que resolvieran una serie de ejercicios haciendo uso del método empleado con anterioridad, y nuevamente se retroalimentó.

## **Resultados**

A continuación se exponen las observaciones y resultados que se obtuvieron en las cuatro sesiones de clase:

### **Sesión 1**

En la primera sesión se observó que 32 estudiantes trataron de utilizar en un determinado momento el método por transposición de términos para la resolución de los ejercicios del cuestionario inicial, sin embargo únicamente un alumno pudo resolver de manera exitosa las cinco ecuaciones presentadas usando esta técnica, sin ningún problema con los signos, así mismo los treinta y uno restantes presentaron deficiencias en el manejo de

los signos, transponiendo los términos pero con el mismo signo, se observó que más de un estudiante realizaba una operación de multiplicación de signos para determinar si la operación era suma o resta, por ejemplo: , expresaban “más por menos es menos, se resta”, por lo que realizaban la operación correspondiente de la siguiente forma , y tampoco identificaban si debían pasar los términos dividiendo ó multiplicando y con qué signo deberían transponerse, por ejemplo, si se tenía , lo resolvían cómo ó si identificaban que dividía lo hacía cómo . También se observaron deficiencias mayores, cómo alumnos que sumaban y restaban indistintamente los términos independientes de los que tenían la incógnita y un caso mucho más extremo que no pudo resolver ningún problema, se presentan algunos casos en la Tabla 2.

Considerando que la mínima aprobatoria es de seis, se obtuvieron veinticinco reprobados, ocho alumnos que pasaron con la mínima aprobatoria y dos alumnos que sobrepasaron la calificación mínima.

### **Sesión 2**

En la segunda sesión existieron dificultades para comprender la última parte del Modelo de la Balanza Diagramático, específicamente en el momento de dejar una sola equis en el platillo, cuando esto fue asimilado, comenzaron a resolver los ejercicios de manera más rápida que en el cuestionario inicial. Finalmente los alumnos lograron relacionar de manera exitosa el signo de igualdad de la ecuación con el equilibrio que debía mantener la balanza y también comprendieron la forma de representar la ecuación con este modelo. Aunque la mayoría comprendió rápidamente este método, tres estudiantes aún tenían dificultades para interpretar la ecuación y mezclaban el método de la balanza con el de transposición realizando operaciones erróneas.

### Sesión 3

En la tercera sesión se asimiló de manera rápida la información, al comparar el Modelo de la Balanza Analítico con el Diagramático y la resolución de los ejercicios fue más fluida y de manera correcta, por lo que se observó un progreso significativo en el aprendizaje de los alumnos, sin embargo los mismos tres estudiantes iban de manera lenta y sin poder resolver efectivamente los ejercicios.

### Sesión 4

En el cuestionario final aplicado en esta sesión, cinco alumnos aprobaron con la calificación mínima esto sobre todo debido a que confundieron signos, veintisiete estudiantes aprobaron el examen con una calificación mayor a la mínima aprobatoria y tres reprobaron, algunos casos se presentan en la Tabla 2.

En la Tabla 1 se presentan las observaciones del cuestionario inicial, final y la elaboración de las hojas de trabajo.

Tabla 1. Resultados de los cuestionarios y hojas de trabajos realizados.

Cuestionario inicial	Hojas de trabajo con el Modelo Diagramático	Hojas de trabajo con el Modelo Analítico	Cuestionario final
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso del método por transposición de términos.</li> <li>• Problemas con signos.</li> <li>• No se entiende el significado del signo de igualdad.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se comprendió rápidamente la analogía entre igualdad y el equilibrio de la balanza.</li> <li>• Existieron problemas al momento de dejar la incógnita sola, pero se comprendieron después de trabajarlos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se comprendió rápidamente el significado analítico de retirar piezas de la balanza.</li> <li>• Se corrigió el problema con los signos en la mayoría de los casos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Algunos alumnos manejaban estrategias más directas.</li> <li>• Subdivisión del problema en problemas más pequeños.</li> <li>• Manejo explícito de signos.</li> </ul>

Tabla 2. Respuestas de algunos alumnos en el cuestionario inicial y final.

Estudiante	Oel Francisco	Abigail	Juan José	Mauricio
<b>Cuestionario Inicial</b>	$5x + 2 = 3x + 6$ $5x = 3x + 6 + 2$ $5x = 3x + 8$ $5x + 3x = 8$ $8x = 8$ $x = \frac{8}{8}$ $x = 1$	$5x + 2 = 3x + 6$ $x =$	$5x + 2 = 3x + 6$ $5x = 3x + 6 - 2$ $5x = 3x - 4$ $5x - 3x = -4$ $x = -4$	$5x + 2 = 3x + 6$ $5x = 3x + 6 + 2$ $5x = 9x$ $x = \frac{9x}{5}$ $x = 1.8$

<b>Final</b>	$5x + 2 = 3x + 6$ $5x + 2 - 2 = 3x + 4$ $5x = 3x + 4$ $2x = 3x - 3x + 4$ $2x = 4$ $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$	$5x + 2 = 3x + 6$ $5x - 3x = +2x$ $3x - 3x = 0$ $2 - 2 = 0$ $6 - 2 = 4$ $+2x + 0 = 0 + 4$ $+2x = +4$ $\frac{+2x}{+2} = \frac{+4}{+2}$ $x = +2$	$5x + 2 = 3x + 6$ $5x + 2 - 2 = 3x + 6 - 2$ $5x = 3x + 4$ $5x - 3x = 3x - 3x + 4$ $2x = 4$ $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$	$5x + 2 = 3x + 6$ $5x + 2 - 2 = 3x + 6 - 6$ $5x = 0$ $x = 0$
<b>Inicial</b>	$7x - 2 = 2x + 8$ $7x = 2x + 8 - 2$ $7x = 2x + 6$ $7x + 2x = 6$ $9x = 6$ $x = \frac{6}{9}$	$7x - 2 = 2x + 8$ $x =$	$7x - 2 = 2x + 8$ $7x - 2x = 8 + 2$ $-5x = 10$ $x = \frac{10}{5}$ $x = 2$	$7x - 2 = 2x + 8$ $5x = 10x$ $x = \frac{5}{10}$ $x = 0.5$
<b>Final</b>	$7x - 2 = 2x + 8$ $7x - 2x - 2 = 2x - x + 8$ $5x - 2 = 8$ $5x - 2 + 2 = 8 + 2$ $5x = 10$ $\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$ $x = 2$	$7x - 2 = 2x + 8$ $7x - 2x = +5x$ $2x - 2x = 0$ $-2 + 2 = 0$ $8 + 2 = +10$ $+5x + 0 = 0 + 10$ $+5x = +10$ $\frac{+5x}{+5} = \frac{+10}{+5}$ $x = +2$	$7x - 2 = 2x + 8$ $7x - 2 + 2 = 2x + 8 + 2$ $7x = 2x + 10$ $7x - 2x = 2x - 2x + 10$ $5x = 10$ $\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$ $x = 2$	$7x - 2 = 2x + 8$ $7x - 2 + 2 = 2x + 8 - 8$ $7x = 2x$ $x = \frac{7}{2}$ $x = 3.5$

## Conclusión

Según Filloy, cuando se inicia con un modelo de enseñanza específico es importante tener muy claro las estrategias que se deberán implementar, así como determinar qué elementos sintácticos intervienen en ella y cuáles ejecuta el estudiante en un determinado momento. De acuerdo con el proyecto realizado, se puede decir que se comenzó con el modelo de la balanza en su modalidad diagramática debido a que es más visual y esto genera una mayor comprensión del significado de la ecuación, de las incógnitas, así como del proceso de resolución y la importancia que tiene el signo igual dentro de la expresión, lo cual se verificó al momento de realizar los ejercicios correspondientes y se observó que se comprendió la correspondencia entre el signo igual y el equilibrio de la balanza lo cual viene

a constatar lo presentado por otros autores (Vlasis, 2002; Filloy & Rojano) quienes también hicieron uso del modelo de la balanza diagramático.

Esta técnica, cómo complemento perfecto, permitió que al utilizar el modelo de la balanza analítico fuera mucho más sencillo comprender el significado de cada signo y expresión que componía la ecuación y por lo tanto se transforme en un aprendizaje significativo para el alumno.

Aún cuando algunos estudiantes iban más lento que otros, se pudo observar un avance significativo en la mayoría de ellos, además es muy importante el interés que muestren acerca de la materia para poder realizar un cambio en su forma de interpretar y comprender la resolución de problemas algebraicos de éste tipo, esto debido a que se observó que los alumnos que reprobaron

tenían una actitud despreocupada y desinteresada por aprender lo expuesto en cada sesión.

Finalmente es de vital importancia mencionar que se recuperó al 92% del grupo en esta temáti-

ca e igualmente se redujo el índice de reprobación y de deserción que finalmente era el objetivo del proyecto de intervención.

## Referencias Bibliográficas

- Filloy, E. and Rojano, T. (1985a). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts of teaching strategies. En Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 154-158). Utrecht, Holanda.
- Filloy, E. and Rojano, T. (1985b). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency in Pre-Algebra). En S. K. Damarin and M. Shelton (eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, pp. 75-79. Columbus, OH.
- Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 341-359.
- Kieran, C. y Filloy Yagüe (1989). *El Aprendizaje del Álgebra Escolar desde una Perspectiva Psicológica*, Université de Québec. Montréal, Canadá y Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, University of London, Institute of Education. Inglaterra. pp. 229-238.
- Rojano, T. *La Matemática Escolar como lenguaje. Nuevas Perspectivas de Investigación y Enseñanza*, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, pp. 45-54, México.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), Resultados Nacionales 2016*.
- Bonilla, M. y Ortega, C. (2014). *De la Balanza Virtual a la Ecuaciones Lineales*, Escuela Normal Superior de México, pp. 2-7. México.
- Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones a la investigación*. Universidad de Laguna. Vol. 77, pp. 6-28.
- Rojano, T. (2010). *Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos*, pp. 5-20.
- Varios, *Revisión por Murga, A. (2003). Diccionario de Ciencias de la Educación*. Universidad Internacional de la Rioja, pp 308-310.